

2023 数学二模拟测试题

(本试卷满分 150 分, 考试时间 180 分钟)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 应满足

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$. (C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

(3) $f(x)$ 是在 $(0, +\infty)$ 内单调增加的连续函数, 对任何 $b > a > 0$, 记 $M = \int_a^b xf(x)dx$, $N = \frac{1}{2}[b \int_0^b f(x)dx - a \int_0^a f(x)dx]$, 则必有 ().

- (A) $M \geq N$. (B) $M \leq N$. (C) $M = N$. (D) $M = 2N$.

(4) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线条数为 ()

- (A) 1 条. (B) 2 条. (C) 3 条. (D) 4 条.

(5) 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$ 可以写成 ()

- (A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx$. (B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$.

- (C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$. (D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy$.

(6) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续, $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处间断, 又 $f(a) \neq 0$, 则 ()

- (A) $\varphi(f(x))$ 在 $x = a$ 处间断. (B) $f(\varphi(x))$ 在 $x = a$ 处间断.

- (C) $(\varphi(x))^2$ 在 $x = a$ 处间断. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x = a$ 处间断.

(7) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$, 且 $f'(0) = 0$, 则 ()

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(8) 设矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $r(A) + r(A - 2E) = (\quad)$.

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(9) 设 3 阶方阵 A 的特征值是 1, 2, 3, 它们所对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $P = (3\alpha_3, \alpha_1, 2\alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP = (\quad)$.

- (A) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(10) 下列矩阵中, A 和 B 相似的是 (\quad)

- (A) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (B) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (C) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (D) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 设函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(x, 2x^2 - 3x + 4) = x$, $f_x(1, 3) = 2$, 则 $f_y(1, 3) = \underline{\hspace{2cm}}$

(12) 方程 $\int_0^x xf(x-t)dt = \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0) = 0$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(13) 设 $y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$ (c_1, c_2 为任意常数) 为某二阶常系数齐次线性方程的通解, 则该方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

(14) $\int_{-2}^2 \frac{x+|x|}{2+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

(15) 设 $y = (\sin x)^{\cos^2 x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}$

(16) 设 A 是三阶矩阵, 已知 $|A+E|=0, |A+2E|=0, |A+3E|=0$, 其中 B 与 A 相似, 则与 B 相似的对角矩阵为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0$, $f'(0)=-2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln \cos(x-t) dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

(18) (本题满分 12 分)

计算积分 $\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx$.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续, 在开区间 $(0,1)$ 内大于零, 并满足

$xf(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2, 求函

数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

(20) (本题满分 12 分)

设积分区域 D 是圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 求 $\iint_D \left(2x^3 + 3 \sin \frac{x}{y} + 7 \right) dx dy$.

(21) (本题满分 12 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(22) (本题满分 12 分)

已知向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ 具有相同

的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示求 a, b 的值.