2023 数学三模拟测试题详解

（本试卷满分 150 分，考试时间 180 分钟）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数n等于（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）.

【解析】由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^4}{x^{n+1}}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}x^{3-n}=0\Rightarrow 3-n>0\Rightarrow n<3,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=0=\lim_{x\to 0}x^{n-1}=0\Rightarrow n-1>0\Rightarrow n>1,$$

又因为n为正整数，故$n=2$.

（2）设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$应满足（　　）

（A）$a<0,b<0.$　　（B）$a>0,b>0.$　　（C）$a\le 0,b>0.$　　（D）$a\ge 0,b<0.$

【答案】（D）

【解析】$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0\Rightarrow b<0;f(x)$连续$\Rightarrow a\ge 0$.

(3) $f(x)$ 是在 $(0,+\infty)$ 内单调增加的连续函数，对任何 $b>a>0$，记 $M=\int_a^b xf(x)dx$，$N=\frac{1}{2}[b\int_0^b f(x)dx-a\int_0^a f(x)dx]$，则必有（　　）.

（A）$M\ge N$.　　（B）$M\le N$.　　（C）$M=N$.　　（D）$M=2N$.

【答案】（A）

【解析】设$F(x)=\int_a^x tf(t)dt-\frac{1}{2}x\int_0^x f(t)dt+\frac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt,x\in[a,b]$，则有

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt-\frac{1}{2}xf(x)\\&=\frac{1}{2}xf(x)-\frac{1}{2}\int_0^x f(t)dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^x[f(x)-f(t)]dt\end{aligned}$$

由于$f(x)$为单调递增函数，则$F'(x)\ge 0$，从而$F(x)$为单调增函数，且$F(a)=0$, 故$F(b)\ge F(a)=0$，即$\int_a^b tf(t)dt-\frac{1}{2}b\int_0^b f(t)dt+\frac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt\ge 0\Rightarrow\int_a^b tf(t)dt\ge\frac{1}{2}b\int_0^b f(t)dt-\frac{1}{2}a\int_0^a f(t)dt$

综上得$M\ge N$

因此（A）为正确选项.

（4）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$分别收敛于$a,b$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（　　）

（A）不一定收敛　　（B）必收敛，和为$2a+b$

（C）必收敛，和为$a-2b$　　（D）必收敛，和为$a+2b$

【答案】(D)

【解析】由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的前$n$项和分别为$s_n,S_n,\sigma_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}S_n=b$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4\cdots-a_{2k}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$

对上式两侧同时取极限可得$a=\sigma_n-2b$

所以$\sigma_n=a+2b$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，和为$a+2b$.

（5）设矩阵A与$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$相似，则$r(A)+r(A-2E)=$（　　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

【答案】(A)

【解析】矩阵A与B相似，则$A-2E$与$B-2E$相似，故$r(A)+r(A-2E)=r(B)+r(B-2E)=2+1=3$.

（6）设 3 阶方阵 A 的特征值是 $1,2,3$，它们所对应的特征向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令 $P=(3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2)$，则 $P^{-1}AP=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

【答案】（B）

【解析】因为 $3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2$ 分别为 A 的对应特征值 $3,1,2$ 的特征向量，故 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

（7）下列矩阵中，A 和 B 相似的是（　　）

（A）$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.　（B）$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\0&1&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

（C）$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.　（D）$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

【答案】（C）.

【解析】（A）中，$r(A)=1,r(B)=2$，故 A 和 B 不相似.

（B）中，$tr(A)=9,tr(B)=6$，故 A 和 B 不相似.

（D）中，A 的特征值为 $2,2,-3$，B 的特征值为 $1,3,-3$，故 A 和 B 不相似.

由排除法可知：只有（C）中矩阵 A 和 B 可能相似.事实上，在（C）中，A 和 B 的特征值均为 $2,0,0$，由于 A 和 B 均可相似对角化，也即 A 和 B 均相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 A 和 B 相似.故选（C）.

（8）设三个事件 A,B,C 满足 $P(AB)=P(ABC)$，且 $0<P(C)<1$，则(　　)

（A）$P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$　（B）$P(A\cup B|C)=P(A\cup B)$

（C）$P(A\cup B|\overline{C})=P(A|\overline{C})+P(B|\overline{C})$　（D）$P(A\cup B|\overline{C})=P(A\cup B)$

【答案】（C）.

【解析】按条件概率定义验证即可

选项（C）

$$P\left(A\cup B\middle|\overline{C}\right)=\frac{P\left(\left(A\cup B\right)\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P\left(A\overline{C}\cup B\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P\left(A\overline{C}\right)+P\left(B\overline{C}\right)-P\left(AB\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}$$

$$=\frac{P\left(A\overline{C}\right)+P\left(B\overline{C}\right)-\left(P\left(AB\right)-P\left(ABC\right)\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P\left(A\overline{C}\right)+P\left(B\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=P\left(A\middle|\overline{C}\right)+P\left(B\middle|\overline{C}\right)$$

故选（C）

（9）总体 $X\sim N(2,4)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则（　　）

（A）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.　　（B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2\sim\chi^2(n-1)$.

（C）$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-2}{2})^2\sim\chi^2(n)$.　　（D）$\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\overline{X}}{2})^2\sim\chi^2(n)$.

【答案】（C）.

【解析】由于 $X_i\sim N(2,2^2)$，则 $\frac{X_i-2}{2}\sim N(0,1)$，故 $\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2\sim\chi^2(1)$，又因为 $\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2,i=1,\ldots,n$ 之间相互独立，则 $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-2}{2}\right)^2\sim\chi^2(n)$，故（C）为正确选项。

（10）设随机变量 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若概率 $P(aX-bY<\mu)=\frac{1}{2}$ 则（　　）

（A）$a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（B）$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.　（C）$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（D）$a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.

【答案】（B）.

【解析】因为 $aX-bY$ 服从正态分布，故根据题设 $P(aX-bY<\mu)=\frac{1}{2}$ 可知，

$$E(aX-bY)=aE(X)-bE(Y)=(a-b)\mu=\mu,$$

从而有 $a-b=1$.因此，（B）为正确选项。

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）设函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,2x^2-3x+4)=x$，$f_x(1,3)=2$，则 $f_y(1,3)=$______

【答案】-1

【解析】方程 $f(x,2x^2-3x+4)=x$ 两边对 x 求导，得

$$f_x(x,2x^2-3x+4)+f_y(x,2x^2-3x+4)\cdot(4x-3)=1,$$

令 $x=1$，得 $f_x(1,3)+f_y(1,3)=1$，故 $f_y(1,3)=-1$.

（12）方程 $\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0)=0$ 的特解为________.

【答案】$f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2}{3(x-1)^2}$.

【解析】令 $x-t=u$，则原方程变为

$$x\int_0^x f(u)du=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt,$$

方程两边对 x 求导得 $\int_0^x f(u)du+xf(x)=x^2+f(x)$，两边再次对 x 求导可得

$$f(x)+f(x)+xf'(x)=2x+f'(x)\Rightarrow f'(x)+\frac{2}{x-1}f(x)=\frac{2x}{x-1},$$

$$f(x)=e^{-\int\frac{2}{x-1}dx}[\int\frac{2x}{x-1}e^{\int\frac{2}{x-1}dx}dx+C]=\frac{2x^3-3x^2+C}{3(x-1)^2}$$

再由 $f(0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x)=\dfrac{2x^3-3x^2}{3(x-1)^2}$.

（13）设 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$（$c_1,c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数齐次线性方程的通解，则该方程为________

【答案】$y''-2y'+2y=0$.

【解析】由于通解为 $y=e^x\left(c_1\sin x+c_2\cos x\right)$，可知该二阶常系数齐次线性方程有一对共轭的虚根 $1\pm i$，故特征方程为 $\lambda^2-2\lambda+2=0$。因此原方程为 $y''-2y'+2y=0$.

（14）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}(x+1)^{n-1}$ 的收敛域是________

【答案】$(-3,1]$

【解析】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}n\cdot 2^n}{(-1)^n(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2}$，可知收敛半径为 $R=2$，收敛区间为 $(-3,1)$。

又由于当 $x=1$ 时，原级数为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$，此时级数是收敛的。故 $x=1$ 在收敛域内。此外，当 $x=-3$ 时，原级数为 $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$，此时级数是发散的。故 $x=-3$ 不在收敛域内.

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}(x+1)^{n-1}$ 收敛域为 $(-3,1]$.

（15）设 A 是三阶矩阵，已知 $|A+E|=0,|A+2E|=0,|A+3E|=0$，其中 B 与 A 相似，则与 B 相似的对角矩阵为_________.

【答案】$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$

【解析】由$|A+E|=0,|A+2E|=0,|A+3E|=0$，可知$A$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_{12}=-2,\lambda_3=-3$。因为相似矩阵具有相同的特征值，所以$B$的特征值也为$\lambda_1=-1,\lambda_{12}=-2,\lambda_3=-3$，则与$B$相似的对角矩阵为$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$.

（16）设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取的两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________.

【答案】0.2.

【解析】设 A：“所取的两件产品中至少有一件事不合格品”，B：“所取的两件都是不合格品”

因为$P(A)=1-P(\bar{A})=1-(C_6^2/C_{10}^2)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=C_4^2/C_{10}^2)=\dfrac{2}{15}$,所以

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{1}{5}.$$

三、解答题：17～22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）设函数$f(x)$在点$x=0$处有$f(0)=0$，$f'(0)=-2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

【答案】0

【解析】由$f(0)=0$，$f'(0)=-2$可知，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-2$，于是当$x\to 0$时，$f(x)$等价于$-2x$.故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0 \ln\cos u\cdot(-du)}{\frac{1}{2}\cdot\left(-2f^2(x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-f^2(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln\cos u\cdot du}{-4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{-8x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{-8}=0.$$

（18）设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}dt=\cos x$.

(I)求 $f(x)$；(II)设 $a_n=f(0)$，求级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$ 的和.

【答案】(I) $f(x)=-\frac{1}{n}\cos x-\sin x$；(II) $1-\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】(I)令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}dt=-\int_x^0 f(u)\mathrm{e}^{\frac{x-u}{n}}du=\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du$，

故 $\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\cos x$，即 $\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-\frac{u}{n}}du=\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x$，

上式两边对 x 求导，得 $f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}=-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\sin x$，

即 $f(x)=-\frac{1}{n}\cos x-\sin x$.

(II) $a_n=f(0)=-\frac{1}{n}$，级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^{n+1}}$，

$$s(x)=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=1-x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}dx=1-x\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=1+x\ln(1-x),\ |x|<1$$

故 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}=s(\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}\ln 2$.

（19）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$, 并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【答案】$a=-5$

【解析】由题设知，当 $x\neq 0$时,

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$$

即
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=\frac{3a}{2},$$

根据此并由 $f(x)$在点$x=0$ 处的连续性，得

$$f(x)=\frac{3ax^2}{2}+Cx,x\in[0,1]$$

又由已知条件得

$$2=\int_0^1(\frac{3}{2}ax^2+Cx)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$$

即 $C=4-a.$

因此 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x.$

旋转体的体积为 $V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx=(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})\pi$

$$V'(a)=(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3})\pi=0$$

得 $a=-5.$，又因 $V''(a)=\frac{1}{15}>0$

故 $a=-5$ 时，旋转体体积最小.

（20）设积分区域 D 是圆环 $1\le x^2+y^2\le 4$，求 $\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy$.

【答案】$-\pi$

【解析】因为积分区域 $1\le x^2+y^2\le 4$ 关于 x 轴和 y 轴对称，且函数 $2x^3$ 及 $\sin\frac{x}{y}$ 分别是 x,y 的奇函数，故将被积函数分项积分，得

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy&=\iint\limits_D 2x^3dxdy+\iint\limits_D 3\sin\frac{x}{y}dxdy+\iint\limits_D 7dxdy,\\&=0+0+7\iint\limits_D dxdy.\end{aligned}$$

由二重积分的几何意义，知 $\iint\limits_D dxdy=4\pi-\pi=3\pi$，故

$$\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\frac{x}{y}+7\right)dxdy=7\cdot3\pi=21\pi.$$

（21）已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示求 a,b 的值.

【答案】$a=15.b=5.$

【解析】

因β_3可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，故线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解，对增广矩阵施行初等行变换：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 2 & 0 & 6 & \vdots & 1 \\ -3 & 1 & -7 & \vdots & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & \vdots & b \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & \dfrac{2b-1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\dfrac{b-5}{3} \end{bmatrix}$$

由非齐次线性方程有解的条件知$-\dfrac{b-5}{3}=0$

解得$b=5$

又因为α_1,α_2线性无关，$\alpha_3=3\alpha_1+2\alpha_2$

所以向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的秩为 2，而题设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$同秩，

从而有

$$|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix} 0 & a & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=15-a=0,$$

由此解得$a=15.$

（22）设总体X的概率密度函数为$f(x,\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-|x|/\lambda},(-\infty<x<+\infty)$，其中$\lambda>0$。$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$X$的一个容量为$n$的样本。

（I）求参数λ的矩估计量；

（II）求参数λ的最大似然估计量；

【答案】（I）$\hat{\lambda}^2=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$ （II）$\hat{\lambda}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ （III）是

【解析】（I）$\mu_1=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\dfrac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=0$，

$$\mu_2=E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=2\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=2\lambda^2,$$

所以$\hat{\mu}_2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=2\hat{\lambda}^2$，得$\hat{\lambda}^2=\sqrt{\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$.

（II）建立似然函数得：$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=2^{-n}\lambda^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\lambda}}$

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=-n\ln 2-n\ln\lambda-\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\lambda},$$

由 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|=0$，得 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$.故 λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$

（III）

$$E(|X|)==\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}dx=2\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}dx=\lambda,$$

所以 $E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}|X_i|)=\frac{1}{n}\cdot n\lambda=\lambda$。因此 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ 是 λ 的无偏估计量。