2023 数学三模拟测试题

（本试卷满分 150 分，考试时间 180 分钟）

一、选择题：1～10 小题，每小题 5 分，共 50 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）$x \to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$e^{x^2}-1$高阶的无穷小，则正整数n等于（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（2）设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数$a,b$应满足

（A）$a<0,b<0.$　　（B）$a>0,b>0.$　　（C）$a\le 0,b>0.$　　（D）$a\ge 0,b<0.$

(3) $f(x)$是在$(0,+\infty)$内单调增加的连续函数，对任何$b>a>0$，记$M=\int_a^b xf(x)dx$，$N=\dfrac{1}{2}[b\int_0^b f(x)dx-a\int_0^a f(x)dx]$，则必有（　）.

（A）$M\ge N$.　　（B）$M\le N$.　　（C）$M=N$.　　（D）$M=2N$.

（4）已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$分别收敛于$a,b$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$（　）

（A）不一定收敛　　（B）必收敛，和为$2a+b$

（C）必收敛，和为$a-2b$　　（D）必收敛，和为$a+2b$

（5）设矩阵A与$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$相似，则$r(A)+r(A-2E)=$（　）.

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6

（6）设 3 阶方阵A的特征值是$1,2,3$，它们所对应的特征向量依次为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，令$P=(3\alpha_3,\alpha_1,2\alpha_2)$，则$P^{-1}AP=$（　）.

（A）$\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　（C）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$

（7）下列矩阵中，A和B相似的是（　）

（A） $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.　　（B） $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&1\\0&1&5\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$.

（C） $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.　　（D） $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-3\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

（8）设三个事件 A,B,C 满足 $P(AB)=P(ABC)$，且 $0<P(C)<1$， 则(　　)

（A） $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$　　（B） $P(A\cup B|C)=P(A\cup B)$

（C） $P(A\cup B|\bar{C})=P(A|\bar{C})+P(B|\bar{C})$　　（D） $P(A\cup B|\bar{C})=P(A\cup B)$

（9）总体 $X\sim N(2,4)$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本， $\bar{X}$ 为样本均值，则（　　）

（A） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$.　　（B） $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2\sim\chi^2(n-1)$.

（C） $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-2}{2})^2\sim\chi^2(n)$.　　（D） $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\bar{X}}{2})^2\sim\chi^2(n)$.

（10）设随机变量 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，若概率 $P(aX-bY<\mu)=\frac{1}{2}$ 则（　　）

（A） $a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（B） $a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.　（C） $a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$.　（D） $a=-\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）设函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,2x^2-3x+4)=x$ ， $f_x(1,3)=2$ ，则 $f_y(1,3)=$______

（12）方程 $\int_0^x xf(x-t)dt=\frac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0)=0$ 的特解为________.

（13）设 $y=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)$（ c_1,c_2 为任意常数）为某二阶常系数齐次线性方程的通解，则该方程为________

（14） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}(x+1)^{n-1}$ 的收敛域是________

（15）设 A 是三阶矩阵，已知 $|A+E|=0,|A+2E|=0,|A+3E|=0$ ，其中 B 与 A 相似，则与 B 相似的对角矩阵为_________.

（16）设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取的两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为________.

三、解答题：17～22 小题，共 70 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程

或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0$， $f'(0)=-2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

（18）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{e}^{\frac{t}{n}}dt=\cos x$.

(I) 求 $f(x)$； (II) 设 $a_n=f(0)$，求级数 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^{n+1}}$ 的和.

（19）（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间(0,1)内大于零，并满足

$xf(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$, 并问 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

（20）（本题满分 12 分）

设积分区域 D 是圆环 $1\le x^2+y^2\le 4$，求 $\iint\limits_D\left(2x^3+3\sin\dfrac{x}{y}+7\right)dxdy$.

（21）（本题满分 12 分）

已知向量组 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}a\\2\\1\end{bmatrix},\beta_3=\begin{bmatrix}b\\1\\0\end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}9\\6\\-7\end{bmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示求 a,b 的值.

（22）（本题满分 12 分）

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\lambda)=\dfrac{1}{2\lambda}e^{-|x|/\lambda},(-\infty<x<+\infty)$，其中 $\lambda>0$。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 X 的一个容量为 n 的样本.

（I）求参数 λ 的矩估计量；

（II）求参数 λ 的最大似然估计量；