

2023 数学一模拟测试题

(本试卷满分 150 分, 考试时间 180 分钟)

一、选择题: 1~10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分, 下列每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

(2) 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 应满足 ()

- (A) $a < 0, b < 0$. (B) $a > 0, b > 0$. (C) $a \leq 0, b > 0$. (D) $a \geq 0, b < 0$.

(3) 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x)$ 等于 () .

- (A) $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$. (B) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. (C) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$. (D) $1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 分别收敛于 a, b , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ()

- (A) 不一定收敛 (B) 必收敛, 和为 $2a + b$
(C) 必收敛, 和为 $a - 2b$ (D) 必收敛, 和为 $a + 2b$

(5) 设矩阵 A 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似, 则 $r(A) + r(A - 2E) =$ () .

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

(6) 设 3 阶方阵 A 的特征值是 1, 2, 3, 它们所对应的特征向量依次为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $P = (3\alpha_3, \alpha_1, 2\alpha_2)$, 则 $P^{-1}AP =$ () .

- (A) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

(7) 下列矩阵中, A 和 B 相似的是 ()

(A) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (B) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (D) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(8) 设三个事件 A, B, C 满足 $P(AB) = P(ABC)$, 且 $0 < P(C) < 1$, 则 ()

(A) $P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C)$ (B) $P(A \cup B | C) = P(A \cup B)$

(C) $P(A \cup B | \bar{C}) = P(A | \bar{C}) + P(B | \bar{C})$ (D) $P(A \cup B | \bar{C}) = P(A \cup B)$

(9) 总体 $X \sim N(2, 4)$, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 X 的样本, \bar{X} 为样本均值, 则 ()

(A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$. (B) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - 2)^2 \sim \chi^2(n-1)$.

(C) $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - 2}{2}\right)^2 \sim \chi^2(n)$. (D) $\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(n)$.

(10) 设随机变量 X, Y 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 若概率 $P(aX - bY < \mu) = \frac{1}{2}$ 则 ()

(A) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. (B) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. (C) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. (D) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 设函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(x, 2x^2 - 3x + 4) = x$, $f_x(1, 3) = 2$, 则 $f_y(1, 3) =$ _____

(12) 方程 $\int_0^x xf(x-t)dt = \frac{1}{3}x^3 + \int_0^x f(t)dt$ 满足 $f(0) = 0$ 的特解为 _____.

(13) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x+1)^{n-1}$ 的收敛域是 _____

(15) 设 A 是三阶矩阵, 已知 $|A+E|=0, |A+2E|=0, |A+3E|=0$, 其中 B 与 A 相似, 则与 B 相似的对角矩阵为 _____.

(16) 设 10 件产品中有 4 件不合格品, 从中任取两件, 已知所取的两件产品中有一件是不合格品, 则另一件也是不合格品的概率为 _____

三、解答题：17~22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有 $f(0)=0$, $f'(0)=-2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln \cos(x-t) dt}{\sqrt{1-2f^2(x)}-1}$.

(18) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $\int_0^x f(x-t) e^{\frac{t}{x}} dt = \cos x$.

(I) 求 $f(x)$; (II) 设 $a_n = f(0)$, 求级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ 的和.

(19) (本题满分 12 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内大于零, 并满足 $xf(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$ (a 为常数), 又曲线 $y = f(x)$ 与 $x = 1, y = 0$ 所围的图形 S 的面积值为 2, 求函数 $y = f(x)$, 并问 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

(20) (本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} 2x^3 dydz + 2y^3 dzdx + 3(z^2 - 1) dxdy$, 其中 Σ 是曲面 $z = 1 - x^2 - y^2$ ($z \geq 0$) 的上侧.

(21) (本题满分 12 分)

已知向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_3 = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 向量组与向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$ 具有相同

的秩, 且 β_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 求 a, b 的值.

(22) (本题满分 12 分)

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x, \lambda) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|x|/\lambda}, (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $\lambda > 0$. X_1, X_2, \dots, X_n 是总体 X 的一个容量为 n 的样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量;

(II) 求参数 λ 的最大似然估计量;

(III) 说明由最大似然估计法所得 λ 的估计量是否为无偏估计量.

