第四章　函数、方程、不等式

核心考点 1：一元二次函数

（1）表达式：一般式 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；顶点式 $y=a(x-k)^2+h(a\neq 0)$；

双根式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$

（2）开口方向：当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下

（3）开口大小：$|a|$ 越大，开口越小

（4）对称轴：对称轴方程 $x=-\dfrac{b}{2a}$

（5）顶点坐标：$(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$

（6）最值：$a>0$，有最小值；$a<0$，有最大值.

（7）和 x 轴的交点：b^2-4ac

（8）增减区间：以对称轴分界：$a>0$，左减右增；$a<0$，左增右减.

（9）特殊值：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；$f(1)=a+b+c$，

$f(-1)=a-b+c$，$f(0)=c$.

1、（07-10-6）一元二次函数 $x(1-x)$ 的最大值为（　）.

A.0.05　　B.0.10　　C.0.15　　D.0.20　　E.0.25

2、（11-10-17）抛物线 $y=x^2+(a+2)x+2a$ 与 x 轴相切

（1）$a>0$

（2）$a^2+a-6=0$

3、（12-1-25）直线 $y=x+b$ 是抛物线 $y=x^2+a$ 的切线。

（1） $y=x+b$与$y=x^2+a$有且仅有一个交点。

（2）$x^2-x\geq b-a(x\in R)$

4、（12-10-2）设实数 x、y 满足 $x+2y=3$，则 x^2+y^2+2y 的最小值为（ ）.

A.4　　B.5　　C.6

D.$\sqrt{5}-1$　　E.$\sqrt{5}+1$

5、（12-10-14）若不等式$\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{x}>4$对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，则常数 a 的取值范围是（ ）.

A.$(-\infty,-1)$　B.$(1,+\infty)$　C.$(-1,1)$　D.$(-1,+\infty)$　E.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

6、（13-1-12）已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$，且过点$(-1,1)$，则（ ）.

A.$b=-2,c=-2$　　B.$b=2,c=2$　　C.$b=-2,c=2$

D.$b=-1,c=-1$　　E.$b=1,c=1$

7、（14-1-23）已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.则能确定 a,b,c 的值.

（1）曲线 $y=f(x)$ 经过点$(0,0)$和点$(1,1)$.

（2）曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=a+b$ 相切.

8、（16-1-12）设抛物线 $y=x^2+2ax+b$ 与 x 轴相交于 A,B 两点，点 C 坐标为$(0,2)$，若ΔABC的面积等于 6，则（　）

（A）$a^2-b=9$　　（B）$a^2+b=9$　　（C）$a^2-b=36$

（D）$a^2+b=36$　　（E）$a^2-4b=9$

9、（16-1-25）已知 $f(x)=x^2+ax+b$，则 $0\leq f(1)\leq 1$

（1）$f(x)$ 在区间$[0,1]$中有两个零点.

（2）$f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 中有两个零点.

10、（17-1-20）直线 $y=ax+b$ 与抛物线 $y=x^2$ 有两个交点.

（1）$a^2>4b$

（2）$b>0$

11、（18-1-11）函数 $f(x)=\max\left\{x^2,-x^2+8\right\}$ 的最小值为（　　）

A.8　　B.7　　C.6

D.5　　E.4

12、（18-1-25）设函数为 $f(x)=x^2+ax$.则 $f(x)$ 的最小值与 $f(f(x))$ 的最小值相等。

（1）$a\geq 2$

（2）$a\leq 0$

13、（20-1-23）设函数 $f(x)=(ax-1)(x-4)$，则在 $x=4$ 左侧附近有 $f(x)<0$.

（1）$a>\dfrac{1}{4}$.　　（2）$a<4$.

14、（21-1-5）设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(2)=f(0)$，则 $\dfrac{f(3)-f(2)}{f(2)-f(1)}=$（ ）

A.2　B.3　C.4　D.5　E.6

15、（21-1-13）函数 f（x）=x²-4x-2$|x-2|$的最小值为（ ）。

A、-4　B、-5　C、-6　D、-7　E、-8

核心考点 2：根的判别式

形式为 $ax^2+bx+c=0$　$(a\neq 0)$　根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$ 两个不相等的实根　$\Delta=0$ 两个相等的实根　$\Delta<0$ 无实根

1、（08-10-29）方程 $3x^2+\left[2b-4\left(a+c\right)\right]x+\left(4ac-b^2\right)=0$ 有相等的实根。

（1）a,b,c 是等边三角形的三条边

（2）a,b,c 是等腰直角三角形的三条边

2、（12-1-16）一元二次方程 $x^2+bx+1=0$ 有两个不同实根.

（1）$b<-2$

（2）$b>2$

3、（13-1-19）已知二次函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$，则方程 $f\left(x\right)=0$ 有两个不同实根

（1）$a+c=0$

（2）$a+b+c=0$

4、（13-10-20）设 a 是整数，则 $a=2$。

（1）二次方程 $ax^2+8x+6=0$ 有实根。

（2）二次方程 $x^2+5ax+9=0$ 有实根。

5、（14-10-24）关于 x 的方程 $mx^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实根。

（1）$m>-1$。

（2）$m\neq 0$。

6、（19-1-20）关于 x 的方程 $x^2+ax+b-1=0$ 有实根

（1）$a+b=0$　　　　（2）$a-b=0$

核心考点 3：韦达定理

（1）韦达定理形式

设 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a};\qquad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

（2）韦达定理的扩展及其应用

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

（3）利用韦达定理求解参数或者用到参数求解最值时，要注意用有实数根缩小范围.

1、（07-10-8）若方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，则 p 和 q 应满足（　）.

A. $p^2=4q$　　B. $2p^2=9q$　　C. $4p=9q^2$

D. $2p=3q^2$　　E.以上结论均不正确

2、（08-10-27）$\alpha^2+\beta^2$ 的最小值是 $\frac{1}{2}$。

（1）α 与 β 是方程 $x^2-2ax+\left(a^2+2a+1\right)=0$ 的两个实根

（2）$\alpha\beta=\frac{1}{4}$

3、（09-1-7）$3x^2+bx+c=0\left(c\neq 0\right)$ 的两个根为 α,β。如果又以 $\alpha+\beta,\alpha\beta$ 为根的一元二次方程　$3x^2-bx+c=0$，则 b 和 c 分别为（　）.

A．2，6　　B.3，4　　C. $-2,-6$

D. $-3,-6$　　E.以上结果都不正确

4、（12-10-18）a,b 为实数，则 $a^2+b^2=16$

（1）a,b 是方程 $2x^2-8x-1=0$ 的两个根

（2）$|a-b+3|$ 与 $|2a+b-6|$ 互为相反数

5、（12-10-21）a,b 为实数，则 $a=1,b=4$

（1）曲线 $y=ax^2+bx+1$ 与 x 轴两个交点的距离为 $2\sqrt{3}$

（2）曲线 $y=ax^2+bx+1$ 关于直线 $x+2=0$ 对称

6、（15-1-10）已知 x_1，x_2 是 $x^2-ax-1=0$ 的两个实根，则 $x_1^2+x_2^2=$（　）.

A. a^2+2　　B. a^2+1　　C. a^2-1

D. a^2-2　　E. $a+2$

核心考点 4：不等式的性质

1、（07-10-27）$x > y$

（1）若 x 和 y 都是正整数，且 $x^2 < y$

（2）若 x 和 y 都是正整数，且 $\sqrt{x} < y$

2、（07-10-28）$a < -1 < 1 < -a$

（1）a 为实数，$a+1<0$

（2）a 为实数，$|a|<1$

3、（08-1-27）$ab^2 < cb^2$

（1）实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$

（2）实数 a,b,c 满足 $a<b<c$

4、（08-1-29）$a>b$

（1）a,b 为实数，且 $a^2>b^2$

（2）a,b 为实数，且 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

5、（12-1-21）已知 a,b 是实数,则 $a>b$

（1）$a^2>b^2$

（2）$a^2>b$

6、（15-1-18）已知 a,b 为实数，则 $a\geq 2$ 或 $b\geq 2$.

（1）$a+b\geq 4$

（2）$ab\geq 4$

7、（16-1-19）设 x,y 是实数，则 $x\leq 6, y\leq 4$

（1）$x\leq y+2$

（2）$2y\leq x+2$

8、（20-1-25）设a,b,c,d是正实数，则$\sqrt{a}+\sqrt{d}\le\sqrt{2(b+c)}$.

（1）$a+d=b+c.$　　　　　　（2）$ad=bc.$

核心考点 5：一元二次不等式

（1）设方程$ax^2+bx+c=0\ (a>0)$有两个不相等的实根x_1,x_2，且$x_1<x_2$，则$ax^2+bx+c>0\ (a>0)$的解集为$x<x_1$或$x>x_2$；$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集为$x_1<x<x_2$，简单概括为“大或取两边，小且取中间”

(2) 两个二次三项式相乘，必有一个式子恒正或恒负.

1、（07-10-10）$x^2+x-6>0$的解集是（　）.

A.$(-\infty,-3)$　　B.$(-3,2)$　　C.$(2,+\infty)$

D.$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　E.以上结论均不正确

2、（08-1-26）$(2x^2+x+3)(-x^2+2x+3)<0$（　）.

（1）$x\in[-3,-2]$

（2）$x\in(4,5)$

3、（09-1-23）$(x^2-2x-8)(2-x)(2x-2x^2-6)>0$

（1）$x\in(-3,-2)$

（2）$x\in[2,3]$

4、（11-10-21）不等式$ax^2+(a-6)x+2>0$对所有实数x都成立

（1）$0<a<3$

（2）$1<a<5$

5、（12-10-25）$x^2-x-5>|2x-1|$

（1）$x>4$

（2）$x<-1$

6、（13-10-5）不等式$\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}\geq 0$的解是（　）.

（A）$(2,3)$　　（B）$(-\infty,2]$　　（C）$[3,+\infty)$

（D）$(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$　（E）$(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

7、（14-1-17）不等式$\left|x^2+2x+a\right|\leq 1$的解集为空集.

（1）$a<0.$

（2）$a>2.$

核心考点 6：指对函数

1、（09-1-18）$\left|\log_a x\right|>1$。

（1）$x\in[2,4],\dfrac{1}{2}<a<1$

（2）$x\in[4,6],1<a<2$

核心考点 7：绝对值方程和不等式

1、（07-10-30）方程$|x+1|+|x|=2$无根

（1）$x\in(-\infty,-1)$

（2）$x\in(-1,0)$

2、（09-1-6）方程$\left|x-|2x+1|\right|=4$的根是（　）.

A. $x=5或x=1$　　B. $x=5或x=-1$　　C. $x=3或x=-\dfrac{5}{3}$

D. $x=-3或x=\frac{5}{3}$　　E.以上均不正确

3、（13-10-25）方程 $|x+1|+|x+3|+|x-5|=9$ 存在唯一解。

（1）$|x-2|\le 3.$

（2）$|x-2|\ge 2.$

4、（17-1-10）不等式 $|x-1|+x\le 2$ 的解集为（　）.

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,\frac{3}{2}]$　　C. $[1,\frac{3}{2}]$

D. $[1,+\infty]$　　E. $[\frac{3}{2},+\infty)$

边缘考点 1：一元一次方程

1、（08-10-8）某学生在解方程 $\frac{ax+1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$ 时，误将式中的 $x+1$ 看成 $x-1$，得出的解为 $x=1$ 的值，则原方程的解应是（　）.

A. $a=1,x=-7$　　B. $a=2,x=-5$　　C. $a=2,x=7$

D. $a=5,x=2$　　E. $a=5,x=\frac{1}{7}$

2、（14-10-3）$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=-1$，则 x =（　）.

A. -2　　B. -1　　C. 0

D.1　　E. 2

3、（08-10-26）曲线 $ax^2+by^2=1$ 通过 4 个定点。

（1）$a+b=1$

（2）$a+b=2$

边缘考点 2：二元一次方程组

1、（10-10-25）$(\alpha+\beta)^{2009}=1$（　）.

（1）$\begin{cases}x+3y=7\\ \beta x+\alpha y=1\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x-y=1\\ \alpha x+\beta y=2\end{cases}$ 有相同的解。

（2）α 与 β 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个根。

边缘考点 3：一元二次方程的解法

1、（09-10-21）关于 x 的方程 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$ 至少有一个整数根。

（1）$a=3$　　　　　　（2）$a=5$

边缘考点 4：方程根的分布问题

（1）化二次项系数为正（方便画图，开口向上），画出符合题意的图像

（2）观察并确定区间端点函数值的正负

（3）约束条件：对称轴和根的判别式

（4）类型一：两个根之间有明确的数字，用（1）（2）两步即可

类型二：两个根之间没有明确的数字，用（1）（2）（3）步解题

1、（08-1-21）方程 $2ax^2-2x-3a+5=0$ 的一个根大于 1，另一个根小于 1（　）.

（1）$a>3$

（2）$a<0$

2、（09-10-9）若关于 x 的二次方程 $mx^2-(m-1)x+(m-5)=0$ 有两个实根 α,β，且满足 $-1<\alpha<0$ 和 $0<\beta<1$，则 m 的取值范围是（　）.

A. $3<m<4$　　B. $4<m<5$　　C. $5<m<6$

D. $m>6$或$m<5$　　E. $m>5$或$m<4$

边缘考点 5：分式方程和不等式

1、（07-10-18）方程 $\frac{a}{x^2-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0$ 有实根。

（1）$a\neq 2$

（2）$a\neq -2$

2、（09-10-20）关于 x 的方程 $\frac{1}{x-2}+3=\frac{1-x}{2-x}$ 与 $\frac{x+1}{x-|a|}=2-\frac{3}{|a|-x}$ 有相同的增根。

（1）$a=2$

（2）$a=-2$

3、（14-10-19）x 是实数。则 x 的取值范围是 $(0,1)$。

（1）$x<\frac{1}{x}$.

（2）$2x<x^2$.

边缘考点 6：三次方程问题

1、（11-10-8）若三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 的三个不同实根 x_1,x_2,x_3 满足：$x_1+x_2+x_3=0, x_1x_2x_3=0,$ 则下列关系式中恒成立的是（　）.

A. $ac=0$　　B. $ac<0$　　C. $ac>0$

D. $a+c<0$　　E. $a+c>0$

本章自我总结：