2023考研数学大纲解析

主讲 翟晓丽

2023考研数学大纲

无变化

主要内容

第一部分 考试形式和试卷结构

第二部分 考试内容和考试要求的变化

第三部分 样题展示

第四部分 现阶段的复习计划

1、试卷满分及考试时间

（1）各卷种试卷满分均为150，考试时间为180分钟.

（2）数学考试在12.25号上午8：30--11：30

天任考研
教 | 育 | 成 | 就 | 梦 | 想

2、试卷内容结构

试卷内容分值比例			
	高等数学（或微积分）	线性代数	概率论与数理统计
数一	约60%	约20%	约20%
数二	约80%	约20%	
数三	约60%	约20%	约20%

3、试卷题型结构

试卷结构			
题型	数一	数二	数三
选择题	高数：1-4 线代：5-7 概率：8-10	高数：1-7 线代：8-10	高数：1-4 线代：5-7 概率：8-10
填空题	高数：11-14 线代：15 概率：16	高数：11-15 线代：16	高数：11-14 线代：15 概率：16
解答题	高数：17,18,19,20 线代：21 概率：22	高数：17,18,19,20,21 线代：22	高数：17,18,19,20 线代：21 概率：22

各卷种试卷题型结构均为：
选择题　10小题，每小题5分，共50分
填空题　6小题，每小题5分，共30分
解答题（包括证明题）　6小题，共70分

天任考研 教|育|成|就|梦|想

1.数一内容变化

高等数学		
内容	2020大纲	2023大纲
一元函数积分学	5. 了解反常积分的概念，会计算反常积分	5. 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的判别法，会计算反常积分
无穷级数	3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，会用根值判别法	3. 掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法，根值判别法，会用积分判别法
其他	无变化	无变化
线性代数		
内容	无变化	无变化
概率论与数理统计		
内容	无变化	无变化

(11). $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}=$ ______

变1：反常积分收敛的判别法，

天任考研 教|育|成|就|梦|想

无穷限广义积分

【定理7】设$f(x)\geq 0$

（1） $p>1,\ f(x)\leq \dfrac{M}{x^p}\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

（2） $p\leq 1,\ f(x)\geq \dfrac{N}{x^p}\Rightarrow \int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

【定理8】设 $f(x)\geq 0$

（1）若$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=c\neq 0$, 则 $\forall p$ 有 $\int_a^{+\infty}\dfrac{1}{x^p}dx$ 与$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性相同。

（2）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=0$，则当 $p>1$ 时 $\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

（3）若$\lim\limits_{x\to+\infty}x^p f(x)=+\infty$，则当 $p\leq 1$ 时$\Rightarrow\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散

无界函数的广义积分：

【定理7’】设 $f(x)\ge 0$

（1）$0<q<1, f(x)\le \dfrac{M}{(x-a)^q} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛

（2）$q\ge 1,\ f(x)\ge \dfrac{N}{(x-a)^q} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

【定理8’】设 $f(x)\ge 0$

（1）若 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=c\ne 0$，则 $\forall q$ 有 $\int_a^b \dfrac{1}{(x-a)^q}dx$

与 $\int_a^b f(x)dx$ 的敛散性相同。

（2）若 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=0$, 则当 $0<q<1$ 时 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 收敛

（3）若 $\lim\limits_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)=+\infty$，则当 $q\ge 1$ 时 $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 发散

例1 证明广义（反常）积分 $\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx(r>0)$ 收敛

证明：$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx=\int_0^{1} x^{r-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}dx=I_1+I_2$

先讨论 I_1 的敛散性

当$r\geq 1$ 时，I_1 是定积分（有值）

当 $0<r<1$ 时，I_1 是瑕积分，因为 $x^{r-1}e^{-x}<x^{r-1}=\dfrac{1}{x^{1-r}}$ ，由于$\int_0^1 \dfrac{1}{x^{1-r}}dx$收敛

由比较审敛法，I_1 收敛

再讨论 I_2 的敛散性

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(e^{-x}x^{r-1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{r+1}}{e^x}=0,$$

当$r>0$ 时，I_2是无穷区间的广义（反常积分）

由极限审敛法，I_2 收敛

综上，当 $r>0$ 时，广义（反常）积分收敛

天任考研 教|育|成|就|梦|想

1. 定理5（根值审敛法也称柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$

（1）当 $\rho < 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

（2）当 $\rho > 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散

（3）当 $\rho = 1$ 时，级数的敛散性不确定

例2求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ 的收敛域

解 用根值判别法

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\quad=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}=\begin{cases}0 & <1 & |x|<1 & \text{收敛}\\ 1/2 & <1 & x=\pm1 & \text{收敛}\\ +\infty & >1 & |x|>1 & \text{发散}\end{cases}$$

所以级数的收敛域为$[-1,1]$

天任考研 教|育|成|就|梦|想

2. 积分判别法

积分判别法是利用非负函数的单调性和积分性质，并以反常积分为比较对象来判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

定理：设 $f(x)$ 为$[1,+\infty)$ 上非负减函数，那么正向级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

$\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散

例3判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 敛散性

解：由于 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^p}$

当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散

则 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 在 $p>1$ 时收敛，在 $p\le 1$ 时发散

高等数学		
内容	2020大纲	2023大纲
多元函数积分学	5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标，极坐标）	5. 理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标，极坐标）
常微分方程	4 理解二阶线性微分方程解的性质及解的结构	4 理解线性微分方程解的性质及解的结构
线性代数		
矩阵的特征值和特征向量	2理解相似矩阵的概念，性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，会将矩阵化为相似对角矩阵 3理解实对称矩阵的特征值和特征向量的性质	2理解相似矩阵的概念，性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法 3掌握实对称矩阵的特征值和特征向量的性质
二次型	1了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换与合同矩阵的概念， 2了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准型，规范型等概念，了解惯性定理，会用正交变换化二次型为标准型的方法	1掌握二次型及其矩阵形式表示，了解二次型的秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形，规范形的概念以及惯性定理， 2掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法话二次型为标准形

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx\int_0^1\frac{1}{1+y^2}dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln 2$$

二重积分的中值定理

设函数 $f(x,y)$ 在区域D上连续，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$

有 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)S_D$

例4 计算 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy$，

其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$

解： 由积分中值定理知，在D上至少存在一点(ξ,η)，使

$$\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy = e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot \pi r^2$$

由于(ξ,η) 在D上，所以当 $r\to 0^+$ 时，$(\xi,\eta)\to(0,0)$

则 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)dxdy = \lim\limits_{(\xi,\eta)\to(0,0)} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$

3.数三内容变化

高等数学		
内容	2020大纲	2023大纲
函数、极限、连续	5. 了解数列极限和函数极限（包括左极限与右极限）的概念	5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在于左极限，右极限之间的关系
一元函数微分学	3. 了解泰勒 6. 会用洛必达法则求极限 9. 会描绘简单函数的图形	1. 理解并会用泰勒 6. 掌握洛必达法则求未定式极限的方法 9. 会描绘函数的图形
一元函数积分学	5. 了解反常积分的概念，会计算反常积分	5. 理解反常积分的概念，了解反常积分收敛的判别法，会计算反常积分
多元函数微分学		了解隐函数存在定理
多元函数积分学	5. 了解二重积分的概念与基本性质，掌握二重积分的计算方法（直角坐标，极坐标）	5. 理解二重积分的概念，了解二重积分的基本性质，了解二重积分的中值定理，掌握二重积分的计算方法（直角坐标，极坐标）

高等数学

内容	2020大纲	2023大纲
无穷级数	1了解级数的收敛与发散，收敛级数的和的概念 2了解级数的基本性质和级数收敛的必要条件，掌握几何级数及级数的收敛与发散的条件，掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法 3了解任意项级数绝对收敛和条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，了解交错级数的莱布尼茨判别法 4会求幂级数的收敛半径，收敛区间及收敛域 5了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性，逐项求导和逐项积分），会求简单幂级数在收敛区间内的和函数 6了解常用函数的麦克劳林展开式	1理解级数的收敛与发散，收敛级数的和的概念 2理解级数的基本性质和级数收敛的必要条件，掌握几何级数及级数的收敛与发散的条件，掌握正项级数收敛性的比较判别法和比值判别法 3理解任意项级数绝对收敛和条件收敛的概念以及绝对收敛与收敛的关系，了解交错级数的莱布尼茨判别法 4掌握求幂级数的收敛半径，收敛区间及收敛域 5了解幂级数在其收敛区间内的基本性质（和函数的连续性，逐项求导和逐项积分），会求简单幂级数在收敛区间内的和函数 6掌握常用函数的麦克劳林展开式
常微分方程	3 会解二阶常系数齐次线性微分方程 4了解线性微分方程解的性质及解的结构定理，会解自由项为多项式，指数函数，正弦函数，余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程	5 理解线性微分方程解的性质及解的结构 6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程 7会解自由项为多项式，指数函数，正弦函数，余弦函数的二阶常系数非齐次线性微分方程

线性代数

内容	2020大纲	2023大纲
二次型	1了解二次型的概念，会用矩阵形式表示二次型，了解合同变换与合同矩阵的概念， 2了解二次型的秩的概念，了解二次型的标准型，规范型等概念，了解惯性定理，会用正交变换化二次型为标准型的方法	1掌握二次型及其矩阵形式表示，了解二次型的秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形，规范形的概念以及惯性定理， 2掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法话二次型为标准形

隐函数存在定理

1.一个方程的情形

（隐函数存在定理1）设函数$F(x,y)=0$ 在点$P(x_0,y_0)$

的某一邻域内具有连续偏导数，当 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$ 时，

能确定隐函数$y=y(x)$ 且$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}$

（隐函数存在定理2）设函数$F(x,y,z)=0$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$

的某一邻域内具有连续偏导数，当 $F_z'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 时，

能确定隐函数 $z=z(x,y)$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}$。

例5 设 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，点 $(0,1,1)$ 的邻域该方程（　）

A. 可以两个确定隐函数 $z=z(x,y),y=y(x,z)$

B. 可以两个确定隐函数 $z=z(x,y)$，$x=x(y,z)$

C. 可以两个确定隐函数 $x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$

D. 不能确定隐函数

【解析】 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$

$$F_x'(0,1,1)=\left(y+xe^{xz}\right)_{(0,1,1)}=2\neq 0$$

$$F_y'(0,1,1)=\left(x-\frac{z}{y}\right)_{(0,1,1)}=-1\neq 0,\quad F_z'(0,1,1)=\left(\ln y+xe^{xz}\right)_{(0,1,1)}=0$$

所以不能确定隐函数$z=z(x,y)$，可以确定隐函数$x=x(y,z)$，$y=y(x,z)$

例6 求 $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$

则$(\mathrm{r}+1)(\mathrm{r}^2+1)^2=0$，得 $\mathrm{r}=-1,\mathrm{r}=\pm i$ （二重根）

通解 $y=c_1e^{-x}+(c_2+c_3x)\cos x+(c_4+c_5x)\sin x$

第三部分 样题展示

1.选择题

（1）函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）连续且取得极大值　　（B）连续且取得极小值

（C）可导且导数等于零　　（D）可导且导数不为零

(2）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$的和函数（ ）

$(A)\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1(-1\le x<1,x\ne 0)$

$(\mathrm{B})\ln(1+x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1(-1<x<1,x\ne 0)$

$(C)-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1(-1\le x<1,x\ne 0)$

$(D)-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)+1(-1\le x<1,x\ne 0)$

2.填空题

（3）计算$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=$______

3.解答题

（4）偏微分方程转换及题目指定的自变量替换

设 $f(r)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，并且 $f(1)=0, f'(1)=1,$

且 $z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

①（偏导转换）验证 $f(r)$ 满足常微分方程

$$r^4 f''(r^2)+3r^2 f'(r^2)+f(r^2)=0$$

②（自变量替换）令 $r^2=e^t$，求解①中的微分方程

③求 $f(r)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值。

（5）设二次型

$$f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2ax_1x_3-2x_2x_3$$

的正负惯性指数都为1。

①求 a 的值；

②求正交变换 $x=Qy$ 把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

③若 $B=A^3-5A+E$，求二次型 x^TBx 的规范形。

（6）设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求

①随机变量 X与 Y 的联合概率密度；

② Y 的概率密度；

③ $P\{X+Y>1\}$，$P\left\{Y>\frac{1}{2}\middle|X=\frac{3}{4}\right\}$

④求 $Z=2X+Y$的概率密度

冲刺来了，

你准备好了么？

冲刺阶段我们应该做什么呢？

1.重心后移

数学复习的这个阶段一定要重心后移。数学的考点、重点、难点，命制的综合题和大题也多数是在后面几章出现。数一高数的重点在定积分、重积分、线面积分、无穷级数等章节，而数二、三的高数部分的重点在微分中值定理、定积分等后面几章。线代最重要是向量的线性相关性、线性方程组、特征值与特征向量、二次型与正定矩阵等内容。这几章题型变化多，知识点的衔接与转换非常集中，便于命制综合题。概率复习的重点是一维随机变量及其分布后面的几章。

2.前后贯穿、形成知识线

在复习高数时，一定要把极限、微分学和积分学有机地结合起来，前后贯穿，灵活运用。在复习线代时，一定要以线性方程组为核心，灵活运用所学知识来分析问题和解决问题。比如行列式、矩阵、向量、线性方程组是线性代数的基本内容，它们不是孤立割裂的，是相互渗近，紧密联系的。在复习概率时，要灵活运用所学知识，建立正确的概率模型。高数需要综合运用极限、连续、导数、积分、广义积分、二重积分等知识去分析和解决实际问题，提高解综合题的能力。

3.利用真题

在最后97天的数学复习中，不管处于什么复习进度的考生，充分利用真题，是保分的第一要件。至少对于近10年的真题要充分利用，对每一个题目都仔细研究并且自行练习，对比自己的答案和参考答案，明确差异点以及得分关键点。同时，建议考生不要局限于自己考试类型的卷种，比如数学一的同学可以把数二数三的卷子都拿来看一看。数二和数三的同学也可以看数一的考题，但要注意看自己考试范围内的题目。

4.模拟题如何做?

市面上的模拟题有很多，质量参差不齐，大都和真题的质量不可比拟。建议考生考前做模拟卷，同时注意做题后的分析和总结，以提高自己的答题速度，合理分配各类题的答题时间。对于开始复习数学时间比较晚，进度较慢的同学根据自身复习情况，重点放在真题上面。

5.合理规划复习时间

要合理有序地安排复习时间。在最后阶段，各科的复习都进入关键时刻。数学的复习不能连续突击太多天，那样头脑会变得不清醒，但是也不能连续搁置太长的时间，建议每天至少花上3个小时复习数学，尽量把最清醒的时间分配给数学。

6.强化记忆、保持状态

由于长时间较为艰苦的复习，到了最后时刻的复习阶段，考生心理和生理都难免会感到疲惫，而此时恰恰是复习最关键的时候。这个时候我们原来书页的空白处还有笔记本上总结的东西就有大用了。因为是自己的总结，所以看这些东西，对我们自己而言更有针对性，让我们可以很快地恢复状态、加深记忆。在此基础上，最好按照考试时间去做一些强度不太大的模拟题或者已经做过的真题，让自己保持手感。

1、学习没有规划，自学能力较差的学生

2、立志冲击名校的学生

3、想要短期高效率学习的学生

4、二战学生

5、想一次性通过考研的学生

选择

天任考研全日制冲刺决胜营

1、(讲)全程面授精讲课程，从易到难，层层递进，分模块教学。
2、(练)讲练结合,配合真题，模拟题，真正做到听得懂，会做题，能拿分。
3、(测)入学测试、日测、周测、阶段测、全真模拟测试。定期检查学习效果，查漏补缺，灵活调整学习计划。
4、(评) 每周安排习题课程，讲解作业及测评卷,真正的做到高效消化所讲内容，稳扎稳打。
5、(答)有问必答，线上答疑、面授答疑，学习阶段不存疑。
6、(定)制定高效复习方案，私人订制日计划/周计划/阶段计划，个性化调整方案。
7、(管) 班主任保姆式陪伴：督学记录、考勤记录、测试记录及家校联动反馈成绩，学习任务不拖延。

天任考研全日制冲刺决胜营

专业的师资团队

完善的课程体系

精细的教学服务

脚踏实地，稳步前行，坚持到底，就是胜利！

谢 谢 大 家 聆 听