绝密★启用前

考生编号	
姓名	

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）模拟试卷三

（科目代码：302）

考生注意事项

1.答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2.选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其它地方无效。

3.填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4.考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，则（　　）

（A）$a=\frac{1}{3},b=-1$　（B）$a=-\frac{1}{3},b=1$　（C）$a=\frac{1}{3},b=1$　（D）$a=-\frac{1}{3},b=-1$

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，$f''(x)\geq M>0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内不同实根个数为（　　）

（A）3　（B）2　（C）1　（D）0

（3）函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\pi x}{1+(2x)^{2n}}$ 的间断点有（　　）个

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（4）设 $f(u)$ 为连续的偶函数，a 是常数，则（　　）

（A）$\int_a^x[\int_0^u tf(t)dt]du$ 必是奇函数　（B）$\int_0^x[\int_a^u f(t)dt]du$ 必是奇函数

（C）$\int_0^x[\int_a^u tf(t)dt]du$ 必是奇函数　（D）$\int_a^x[\int_0^u f(t)dt]du$ 必是奇函数

（5）设函数 $f(x)$ 二阶连续可导，$f'(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|+x^3}=-1$，则（　）

（A）$x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点

（B）$x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

（C）$(0,f(0))$ 为 $y=f(x)$ 的拐点

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 不是 $y=f(x)$ 的拐点

（6）在平面直角坐标系 xoy 中，区域 D 由 x 轴，y 轴以及直线 $x+y=\frac{1}{4},x+y=1$ 围成，若 $I_1=\iint\limits_D \ln^3(x+y)dxdy,I_2=\iint\limits_D(x+y)^2dxdy,I_3=\iint\limits_D\sin^2(x+y)dxdy$,则（　　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_3<I_2<I_1$　（C）$I_3<I_1<I_2$　（D）$I_1<I_3<I_2$

（7）具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是（　）

（A）$y'''-y''-y'+y=0.$　（B）$y'''+y''-y'-y=0.$

（C）$y'''-6y''+11y'-6y=0.$　（D）$y'''-2y''-y'+2y=0.$

（8）设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，且 $\alpha_1\neq 0, A\alpha_1=k\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_1+k\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+k\alpha_3$，则（　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

（C）$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性相关 （D）$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性无关

（9）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&k\\2&-1\end{pmatrix}$，若存在矩阵 C，使得 $AC=B$，则 $k=$（ ）

（A）-2 （B）-1 （C）0 （D）1

（10）已知实对称矩阵 A 与 $B=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的规范型是（ ）

（A）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$ （B）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$ （C）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$ （D）$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{2^3-1}{2^3+1}\bullet\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1})=$__________

（12）求 $y^2=(1-x^2)^3$ 所围成图形的面积是__________

（13）微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy-y^2}{x^2-2xy}$ 满足 $y(1)=-2$ 的特解是__________

（14）计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+e^x)^2}dx=$__________

（15）一半径为 R 的球沉入水中，球面顶部正好与水面相切，球的密度为 1，将球从水中取出所做的功为____

（16）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2+x_3)^2+(4x_1+5x_2+3x_3)^2+(2x_1+ax_2-3x_3)^2$ 是正定二次型，则 a 的取值范围为__________

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}, a>0, b>0$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D[(x+1)^2+(2y-1)^2]dxdy$

（18）（本题满分 12 分）

设 $x_0=25$，$x_n=\arctan x_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$）.

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；

（II）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$.

（19）（本题满分 12 分）

设心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 与 $\theta=0, \theta=\frac{\pi}{2}$ 所围图形为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：（I）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（II）在 (a,b) 内存在与（I）中的 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（21）（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$z(x,0)=x^4-x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$,

（Ⅰ）求 $z=z(x,y)$ 的表达式；

（Ⅱ）求 $z=z(x,y)$ 的极值

（22）（本题满分 12 分）

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&1&0\\-1&-2&4\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 a,b,c 的值；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$