绝密★启用前

考生编号	
姓名	

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）模拟试卷三

（科目代码：303）

考生注意事项

1.答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。

2.选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其它地方无效。

3.填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。

4.考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to0}(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{b}{x^5}\int_0^x e^{-t^2}dt)$ 存在，则（　　）

（A）$a=\frac{1}{3},b=-1$　（B）$a=-\frac{1}{3},b=1$　（C）$a=\frac{1}{3},b=1$　（D）$a=-\frac{1}{3},b=-1$

（2）函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\pi x}{1+(2x)^{2n}}$ 的间断点有（　　）个

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)<0$，$f''(x)\ge M>0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内不同实根个数为（　　）

（A）3　（B）2　（C）1　（D）0

(4) 设商品的需求函数为 $Q(p)=150-\frac{15}{2}p-p^2(0<p<8)$ 其中 Q,p 分别表示需求量和价格，令 η 为商品需求弹性，即 $\eta=p\cdot\frac{Q'(p)}{Q(p)}$，如果 $|\eta|<1$，则商品价格 p 的取值范围是（　　）

（A）$0<p<3$　（B）$5<p<8$　（C）$3<p<5$　（D）$0<p<5$

（5）设 A 是 3 阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，且 $\alpha_1\ne0$, $A\alpha_1=k\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_1+k\alpha_2, A\alpha_3=\alpha_2+k\alpha_3$，则（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

（C）$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性相关　（D）$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 线性无关

（6）设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4&-1\\2&k\\2&-1\end{pmatrix}$，若存在矩阵 C，使得 $AC=B$，则 $k=$（　）

（A）-2　（B）-1　（C）0　（D）1

（7）已知实对称矩阵 A 与 $B=\begin{bmatrix}0&2&0\\2&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 合同，则二次型 x^TAx 的规范型是（　　）

（A）$y_1^2+y_2^2-y_3^2$　（B）$y_1^2-y_2^2-y_3^2$　（C）$y_1^2+y_2^2+y_3^2$　（D）$-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

（8）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则随机变量 X^2 的概率密度函数为（　　）

（A）$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$　（B）$f_1(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}[f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})]$

（C）$f_1(x)=\begin{cases}\frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases}$　（D）$f_1(x)=\begin{cases}\frac{f(\sqrt{x})+f(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x>0\\ 0 & x\le0\end{cases}$

（9）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_9$ 相互独立且同分布，$E(X_i)=1,\ D(X_i)=1,\ i=1,2,\cdots,9$，令 $S_9=\sum\limits_{i=1}^{9}X_i$.则对任意 $\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式直接可得（　　）

（A）$P\{|S_9-1|<\varepsilon\}>1-\frac{1}{\varepsilon^2}$　（B）$P\{|S_9-9|<\varepsilon\}\ge1-\frac{9}{\varepsilon^2}$

（C）$P\{|S_9-9|<\varepsilon\}>1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$　　（D）$P\{|\dfrac{1}{9}S_9-1|<\varepsilon\}\ge 1-\dfrac{1}{\varepsilon^2}$

（10）假设随机变量 X 和 Y 独立且均在 $(0,\theta)$ 内服从均匀分布，则 $E(\min\{X,Y\})$ 等于（　）

（A）$\dfrac{\theta}{6}$　（B）$\dfrac{\theta}{4}$　（C）$\dfrac{\theta}{3}$　（D）$\dfrac{\theta}{2}$

二、填空题：11～16 小题，每小题 5 分，共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（11）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\bullet\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\dfrac{n^3-1}{n^3+1})=$____________

（12）微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy-y^2}{x^2-2xy}$ 满足 $y(1)=-2$ 的特解是____________

（13）求 $y^2=(1-x^2)^3$ 所围成图形的面积是____________

（14）计算积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+e^x)^2}dx=$____________

（15）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+3x_2+x_3)^2+(4x_1+5x_2+3x_3)^2+(2x_1+ax_2-3x_3)^2$ 是正定二次型，则 a 的取值范围为__________

（16）设随机变量 $X\sim B(3,p)$，且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-X&1/4\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 的特征值全为实数的概率为 $\dfrac{7}{8}$，则

$p=$______

三、解答题：17～22 小题，共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$（$x>0$）是微分方程 $2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的一个解，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)}{x}=0$

（Ⅰ）求 $y=y(x)$，并求 $y=y(x)$ 的最大值；

（Ⅱ）判断广义积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的敛散性.

（18）（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$z(x,0)=x^4-x^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$,

（Ⅰ）求 $z=z(x,y)$ 的表达式

（Ⅱ）求 $z=z(x,y)$ 的极值

（19）（本题满分 12 分）

设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx, n=1,2,\cdots$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的值

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：（Ⅰ）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（Ⅱ）在 (a,b) 内存在与（Ⅰ）中的 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（21）（本题满分 12 分）

设 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&1&0\\-1&-2&4\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 a,b,c 的值；（2）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$

22.（本题满分 12 分）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ \dfrac{1}{3}(1-\theta) & 1\le x<4\\ 0 & other\end{cases}$，其中 $0<\theta<1$ 为未知参数，

若总体有如下样本值：0.30，0.50，0.80，1.20，1.50，1.80，2.50，2.80，3.20，3.80

试求：（1）分布函数 $F(x)$　（2）参数 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$　（3）$b=P\{X\ge 2\}$ 的最大似然估计