

绝密★启用前

考生编号	
姓名	

2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）模拟试卷三

（科目代码：301）

考生注意事项

- 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
- 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其它地方无效。
- 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
- 考试结束，将答题纸和试题册一并装入试题袋中交回。

一、选择题：1~10 小题，每小题 5 分，共 50 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

- 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt)$ 存在，则（ ）
 (A) $a = \frac{1}{3}, b = -1$ (B) $a = -\frac{1}{3}, b = 1$ (C) $a = \frac{1}{3}, b = 1$ (D) $a = -\frac{1}{3}, b = -1$
- 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + xy\vec{j} + zk\vec{k}$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的旋度 $rot A =$ （ ）
 (A) $\vec{i}$ (B) $\vec{j}$ (C) $\vec{j} + \vec{k}$ (D) $\vec{i} + \vec{j}$
- 函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi x}{1 + (2x)^{2n}}$ 的间断点有（ ）个
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

- 与直线 $L_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面 Π 的方程是（ ）
 (A) $x - y + z = 0$. (B) $x + y + z = 0$. (C) $x + y - z = 0$. (D) $x - y + z + 2 = 0$.

- 设 A 是 3 阶矩阵， $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维列向量，且 $\alpha_1 \neq 0, A\alpha_1 = k\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_1 + k\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + k\alpha_3$ ，则（ ）

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关
- $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性相关
- $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性无关

- 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & k \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ，若存在矩阵 C ，使得 $AC = B$ ，则 $k =$ （ ）

- 2
- 1
- 0
- 1

- 方程 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 1$ 表示的曲面为（ ）

- 椭球面
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面
- 柱面

- 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)$ ，则随机变量 X^2 的概率密度函数为（ ）

- $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$
- $f_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} [f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})]$

- $f_1(x) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
- $f_1(x) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$

- 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_9$ 相互独立且同分布， $E(X_i) = 1, D(X_i) = 1, i = 1, 2, \dots, 9$ ，令

$S_9 = \sum_{i=1}^9 X_i$ ，则对任意 $\varepsilon > 0$ ，由切比雪夫不等式直接可得（ ）

- $P\{|S_9 - 9| < \varepsilon\} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$
- $P\{|S_9 - 9| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{9}{\varepsilon^2}$

(C) $P\{|S_9 - 9| < \varepsilon\} > 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$ (D) $P\{|\frac{1}{9}S_9 - 1| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$

(10) 假设随机变量 X 和 Y 独立且均在 $(0, \theta)$ 内服从均匀分布, 则 $E(\min\{X, Y\})$ 等于()

(A) $\frac{\theta}{6}$ (B) $\frac{\theta}{4}$ (C) $\frac{\theta}{3}$ (D) $\frac{\theta}{2}$

二、填空题: 11~16 小题, 每小题 5 分, 共 30 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(11) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)^2} dx =$ _____

(12) 曲面片 $\Sigma: z^2 = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 1)$ 的形心为 _____

(13) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\arcsin^2 x}) =$ _____

(14) 设 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 所围成的区域, 则 $I = \iiint_{\Omega} (x+z) dv =$ _____

(15) 已知 $\mathbb{R}^3$ 的两个基为 $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (1, 0, -1)^T, \alpha_3 = (1, 0, 1)^T$ 及

$\beta_1 = (1, 2, 1)^T, \beta_2 = (2, 3, 4)^T, \beta_3 = (3, 4, 3)^T$, 则由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵为

(16) 设随机变量 $X \sim B(3, p)$, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -X & 1/4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值全为实数的概率为 $\frac{7}{8}$, 则

$p =$ _____

三、解答题: 17~22 小题, 共 70 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$, $z(x, 0) = x^4 - x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0, y)} = 4y^3 - 2y$,

(I) 求 $z = z(x, y)$ 的表达式;

(II) 求 $z = z(x, y)$ 的极值

(18) (本题满分 12 分)

设 $a_n = \int_0^{n\pi} x |\sin x| dx, n = 1, 2, \dots$, 试求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 的值

(19) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $f(a) = a$, 且 $\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

证明: (I) $\exists \xi \in (a, b)$ 内, 使 $\xi = f(\xi)$;

(II) 在 (a, b) 内存在与 (I) 中的 ξ 相异的点 η , 使得 $f'(\eta) = f(\eta) - \eta + 1$.

(20) (本题满分 12 分)

计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} yz(y-z) dydz + zx(z-x) dzdx + xy(x-y) dx dy$, 其中 Σ 是上半球面

$z = \sqrt{4Rx - x^2 - y^2} (R \geq 1)$ 在柱面 $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = 1$ 之内部分的上侧.

(21) (本题满分 12 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 a, b, c 的值; (2) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$

22. (本题满分 12 分)

设总体 X 的概率密度函数为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3}(1-\theta) & 1 \leq x < 4 \\ 0 & \text{other} \end{cases}$, 其中 $0 < \theta < 1$ 为未知参数,

若总体有如下样本值: 0.30, 0.50, 0.80, 1.20, 1.50, 1.80, 2.50, 2.80, 3.20, 3.80

试求: (1) 分布函数 $F(x)$

(2) 参数 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$

(3) $b = P\{X \geq 2\}$ 的最大似然估计