2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）模拟卷三解析

一、选择题

（1）【答案】(D)

（2）【答案】(C)

（3）【答案】(C)

（4）【答案】(C)

（5）【答案】(A)

（6）【答案】(D)

（7）【答案】(B)

（8）【答案】(B)

（9）【答案】(A)

（10）【答案】(A)

二、填空题

（11）【答案】$\frac{2}{3}$

（12）【答案】$\frac{3}{4}\pi$

（13）【答案】$xy=2(x+y)^3$

（14）【答案】$\ln 2-\frac{1}{2}$

（15）【答案】$\frac{4\pi R^4 g}{3}$

（16）【答案】$a\neq 7$

三、解答题

（17）（本题满分 10 分）

设 $D=\{(x,y)|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\},a>0,b>0$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D[(x+1)^2+(2y-1)^2]dxdy$

【解析】区域 D 关于 x 轴和 y 轴均对称，故

$$I=\iint\limits_D(x^2+2x+4y^2-4y+1)dxdy=\iint\limits_D(x^2+4y^2+2)dxdy=\iint\limits_D(x^2+4y^2)dxdy+2\pi ab$$

利用广义极坐标变换，令 $\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$，则 $dxdy=abrdrd\theta$

$$\iint\limits_D(x^2+4y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(a^2r^2\cos^2\theta+4b^2r^2\sin^2\theta)abrdr$$

$$=ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+4b^2\sin^2\theta)d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{1}{4}ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+4b^2\sin^2\theta)d\theta$$

$$=a^3b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta+4ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}a^3b+\pi ab^3$$

故原式$=\frac{\pi}{4}a^3b+\pi ab^3+2\pi ab$

（18）（本题满分 12 分）设 $x_0=25$，$x_n=\arctan x_{n-1}$（$n=1,2,\cdots$）.

（I）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求它的值；　　（II）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{x_n^3}$.

【证明】（I）令 $f(x)=\arctan x$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$，

因而函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单增，又 $x_0=25$，$x_1=\arctan x_0<\frac{\pi}{2}<x_0$，

由此可得数列 $\{x_n\}$ 是单调递减的，又 $x_n>0$，则单调有界收敛原理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对等式 $x_n=\arctan x_{n-1}$ 两边同时取极限可得 $a=\arctan a$，解得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=0$；

（II）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{1+x^2}}{3x^2}=-\frac{1}{3}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，

可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\arctan x_{n-1}-x_{n-1}}{(\arctan x_{n-1})^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=-\frac{1}{3}$.

（19）（本题满分 12 分）设心形线 $r=4(1+\cos\theta)$ 与 $\theta=0,\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围图形为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】心形线的参数方程为 $\begin{cases}x=r\cos\theta=4\cos\theta(1+\cos\theta)\\ y=r\sin\theta=4\sin\theta(1+\cos\theta)\end{cases}$

D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_0^8 y^2(x)dx=64\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2d[\cos\theta(1+\cos\theta)]$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)d\theta$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)d(-\cos\theta)$$

$$=64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)^2(1+2\cos\theta)d(-\cos\theta)$$，令 $\cos\theta=t$

$$=64\pi\int_0^1(1-t^2)(1+t)^2(1+2t)dt$$

$$=64\pi\int_0^1(1+4t+4t^2-2t^3-5t^4-2t^5)dt$$

$$=64\pi(1+2+\frac{4}{3}-\frac{2}{4}-1-\frac{2}{6})=160\pi$$

（20）（本题满分 12 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：（I）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（II）在 (a,b) 内存在与（I）中的 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

【证明】（I）由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$，

记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$），

相应的必有 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，

即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$.

（II）令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，

由罗尔定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-1]-\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（21）（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$z(x,0)=x^4-x^2$，$\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$，

（Ⅰ）求 $z=z(x,y)$ 的表达式；（Ⅱ）求 $z=z(x,y)$ 的极值

【解】（Ⅰ）由已知，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$

在 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$ 两端同时对 x 进行积分，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+C_1(y)$

由 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$,，得 $C_1(y)=4y^3-2y$，故 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$

再对 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$ 两边同时对 y 积分，得 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+C_2(x)$

由 $z(x,0)=x^4-x^2$, 得 $C_2(x)=x^4-x^2$，故 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+x^4-x^2$

（Ⅱ）令 $\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0),(1,1),(-1,-1)$。

又 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2$

对于点 $(1,1),(-1,-1)$，有 $A=10>0,B=-2,C=10$，则 $B^2-AC<0$，

故 $z(x,y)$ 在 $(1,1),(-1,-1)$ 处取得极小值 $z=-2$。

对于点 $(0,0)$，有 $A=-2<0,B=-2,C=-2$ 则 $B^2-AC=0$，故需要用定义判断。

在点 $(0,0)$ 的去心领域内，取 $y=x$ 与 $y=-x$，则

$z(x,x)=2x^2(x^2-2)<0=z(0,0)$，$z(x,-x)=2x^4>0=z(0,0)$，综上 $(0,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点。

（22）（本题满分 12 分）

【解析】（1）由 $A\sim B$，知 $\begin{cases}5=a+5\\3=4a+c\end{cases}$ 解得 $a=0,c=3$.

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$，故 B 的特征值也为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$

又 A 是实对称矩阵，则 A 可对角化，由 $A\sim B$ 可得 B 也可对角化，故 $r(E-B)=1$，解得 $b=-2.$

（2）由 $(E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T$.

由 $(3E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_3=(1,1,0)^T$.

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

由 $(E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=(3,0,1)^T$.

由 $(3E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_3=(1,0,1)^T$.

令 $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.