2022 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）模拟卷三解析

一、选择题

（1）【答案】(D)

（2）【答案】（C）

（3）【答案】（C）

（4）【答案】（D）

（5）【答案】（B）

（6）【答案】（A）

（7）【答案】（A）

（8）【答案】（D）

（9）【答案】（B）

（10）【答案】（C）

二、填空题

（11）【答案】$\frac{2}{3}$

（12）【答案】$xy=2(x+y)^3$

（13）【答案】$\frac{3}{4}\pi$

（14）【答案】$\ln 2-\frac{1}{2}$

（15）【答案】$a\neq 7$

（16）【答案】$\frac{1}{2}$

三、解答题

（17）（本题满分 10 分）

设 $y=y(x)$（$x>0$）是微分方程 $2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的一个解，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=0$

（Ⅰ）求 $y=y(x)$，并求 $y=y(x)$ 的最大值；（Ⅱ）判断广义积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的敛散性.

【解析】（Ⅰ）$2y''+y'-y=(4-6x)e^{-x}$ 的特征方程为 $2\lambda^2+\lambda-1=0$，

特征根为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\frac{1}{2}$，则通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$

设特解为 $y_*=x(ax+b)e^{-x}$，代入求得 $a=1,b=0$，则方程通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+x^2e^{-x}$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y(x)}{x}=0$ 得 $y(0)=0,y'(0)=0$，

代入通解得 $C_1=0,C_2=0$，故 $y=x^2e^{-x}$，

由 $y'=(2x-x^2)e^{-x}=0$ 得 $x=2$，当 $x\in(0,2)$ 时，$y'>0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$y'<0$，

则 $x=2$ 为 $y=y(x)$ 的最大值，最大值为 $y(2)=4e^{-2}$

（Ⅱ）$\int_0^{+\infty}y(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-x}=-x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-x}dx=-\int_0^{+\infty}2xde^{-x}$

$=-2xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-2e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=2$，故 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛

（18）（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$z(x,0)=x^4-x^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$,

（Ⅰ）求 $z=z(x,y)$ 的表达式；（Ⅱ）求 $z=z(x,y)$ 的极值

【解】（Ⅰ）由已知，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$

在 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2$ 两端同时对 x 进行积分，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+C_1(y)$

由 $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,y)}=4y^3-2y$,，得 $C_1(y)=4y^3-2y$，故 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$

再对 $\frac{\partial z}{\partial y}=-2x+4y^3-2y$ 两边同时对 y 积分，得 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+C_2(x)$

由 $z(x,0)=x^4-x^2$, 得 $C_2(x)=x^4-x^2$，故 $z=z(x,y)=-2xy+y^4-y^2+x^4-x^2$

（II）令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2x-2y=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$ 解得驻点为 $(0,0),(1,1),(-1,-1)$。

又 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-2$，$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2$，$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-2$

对于点 $(1,1),(-1,-1)$，有 $A=10>0,B=-2,C=10$，则 $B^2-AC<0$，

故 $z(x,y)$ 在 $(1,1),(-1,-1)$ 处取得极小值 $z=-2$。

对于点 $(0,0)$，有 $A=-2<0,B=-2,C=-2$ 则 $B^2-AC=0$，故需要用定义判断。

在点 $(0,0)$ 的去心领域内，取 $y=x$ 与 $y=-x$，则

$z(x,x)=2x^2(x^2-2)<0=z(0,0)$，$z(x,-x)=2x^4>0=z(0,0)$，综上 $(0,0)$ 不是 $z(x,y)$ 的极值点。

（19）（本题满分 12 分）

设 $a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx,n=1,2,\cdots$，试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ 的值

【解析】$a_n=\int_0^{n\pi}x|\sin x|dx=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|dx\overset{t=x-k\pi}{=}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)|\sin(k\pi+t)|dt$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(k\pi+t)\sin tdt=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi=\pi\cdot\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2\pi$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n,-1<x<1$，则

$S(x)=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=x\left(x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$，

记 $S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，

故 $S(x)=x\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]'=\dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}=\pi S\left(\dfrac{1}{2}\right)=6\pi$

（20）（本题满分 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=a$，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$.

证明：（I）$\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$；

（II）在 (a,b) 内存在与（I）中的 ξ 相异的点 η，使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

【证明】（I）由 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(b^2-a^2)$ 可知 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$，

记 $F(x)=f(x)-x$，那么函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

若 $F(x)$ 在 (a,b) 无零点，那么 $x\in(a,b)$ 时恒有 $F(x)>0$（或者 $F(x)<0$），

相应的必有 $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x>0$（或 <0）与 $\int_a^b[f(x)-x]\mathrm{d}x=0$ 矛盾，故 $F(x)$ 在 (a,b) 内必有零点，

即 $\exists\xi\in(a,b)$ 内，使 $\xi=f(\xi)$.

（II）令 $G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$，则有 $G(a)=G(\xi)=0$，

由罗尔定理知 $\exists\eta\in(a,\xi)$ 使得 $G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-1]-\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$，即有 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（21）（本题满分 12 分）

【解析】（1）由 $A\sim B$，知 $\begin{cases}5=a+5\\3=4a+c\end{cases}$ 解得 $a=0,c=3.$

由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-3)=0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$，故 B 的特征值也为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=3.$

又 A 是实对称矩阵，则 A 可对角化，由 $A\sim B$ 可得 B 也可对角化，故 $r(E-B)=1$，解得 $b=-2.$

（2）由 $(E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_1=(-1,1,0)^T,\alpha_2=(0,0,1)^T.$

由 $(3E-A)x=0$ 得特征向量 $\alpha_3=(1,1,0)^T.$

令 $P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}.$

由 $(E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_1=(-2,1,0)^T,\beta_2=(3,0,1)^T.$

由 $(3E-B)x=0$ 得特征向量 $\beta_3=(1,0,1)^T$.

令 $P_2=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&3\end{pmatrix}$.

令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-2&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

22.（本题满分 12 分）

【解析】（1）X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\int_{-\infty}^{x}f(t;\theta)dt=\begin{cases}0 & x<0\\ \theta x & 0\le x<1\\ \frac{1-\theta}{3}x+\frac{4\theta-1}{3} & 1\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$

（1）参数 θ 的似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{3^7}\theta^3(1-\theta)^7$

取对数 $\ln L(\theta)=-7\ln 3+3\ln\theta+7\ln(1-\theta)$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{3}{\theta}-\frac{7}{1-\theta}=0$，可得 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=\frac{3}{10}$

（2）$b=P\{X\ge 2\}=\int_2^4\frac{1}{3}(1-\theta)dx=\frac{2}{3}(1-\theta)$

注意 b 到是参数 θ 的单调减函数，则 b 的最大似然估计为 $\hat{b}=\frac{2}{3}(1-\hat{\theta})=\frac{7}{15}$